



Instrucciones:

- Asegúrate que tienes el examen del nivel correcto y lee todos los enunciados con calma.
- Tienes dos horas para resolver este examen.
- El examen consta de dos partes:

Parte A Los primeros 12 problemas son únicamente de respuesta cerrada. Escribe la respuesta que consideres correcta en la línea correspondiente en la Hoja de Respuestas. Cada pregunta de la Parte A tiene un valor de un punto por respuesta correcta.

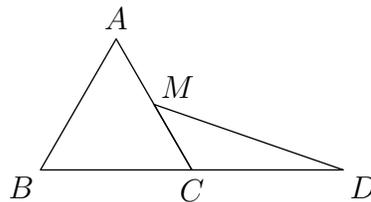
Parte B Para los últimos tres problemas del examen, debes escribir de manera clara el procedimiento que seguiste para resolverlos. Cada problema de la parte B puede valer hasta 4 puntos dependiendo de la completitud de la solución escrita.

- Sólo se tomará en cuenta lo que se coloque sobre la línea (en caso de la Parte A) o en las hojas de solución (en caso de la Parte B). Si tu solución de algún problema de la Parte B incluye más hojas, puedes entregarlas; únicamente asegúrate de que las hojas adjuntas tengan número de hoja y problema al que pertenecen, así como tu nombre. Te puedes quedar con la hoja de enunciados.
- Puedes utilizar lápiz o pluma, borrador y, si tú prefieres, juego de geometría. No está permitido el uso de calculadoras, apuntes, tablas, cualquier dispositivo electrónico ni consultar a otras personas.
- Los resultados se publicarán el 8 de abril en la página <https://olimpiadasbasicas.cimat.mx/>.

Problemas

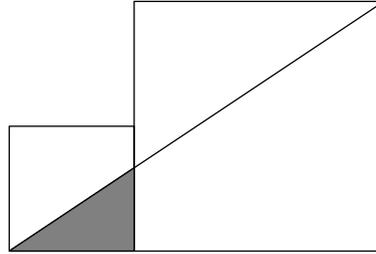
Parte A

1. Se tiene un número de cuatro cifras de tal forma que la multiplicación de sus cifras es 105. Si todas sus cifras son distintas, ¿cuánto vale la suma de las cifras del número?
2. El triángulo equilátero $\triangle ABC$ mide 2 cm de lado. El punto M es el punto medio del lado AC , mientras que C es el punto medio del segmento BD . ¿Cuál es el área del triángulo $\triangle CDM$?



3. Un número de 9 dígitos se dice *apestoso* si contiene únicamente los dígitos del 1 al 9 exactamente una vez y los dígitos impares aparecen en orden creciente. Por ejemplo, el número 213485769 esapestoso. ¿Cuántos númerosapestosos hay?

4. Joshua escribe en un pizarrón las primeras 2019 potencias de 2 comenzando por 1, 2, 4, y así sucesivamente hasta 2^{2018} . Le pide a Issis que multiplique todas las potencias que escribió y le diga el resultado; sin embargo, Issis sabe que le resultaría un número muy grande, por lo cual sólo le dirá la última cifra del número resultante. ¿Qué cifra le dirá Issis a Joshua?
5. En la figura, los cuadrados tienen lados de longitud 4 y 8. Encuentra el área sombreada.



6. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres números diferentes del Conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ de manera que la suma de esos tres números sea múltiplo de 3.
7. Sea x un número tal que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Encuentra el valor de $x^8 + \frac{1}{x^8}$.
8. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 6 cm y la hipotenusa mide 10 cm. Si se traza la altura que parte del ángulo recto, divide al triángulo en dos triángulos más pequeños, ¿cuál es el área del menor de estos triángulos pequeños resultantes?
9. Un número de cuatro dígitos $abcd$ se escribe al revés y se obtiene el número $dcba$. Al mayor se le resta el menor y da como resultado otro número de cuatro dígitos, donde tres de ellos son 2, 5 y 8. ¿Cuál es el dígito que falta?
10. La economía basada en tazos, taparroschas y monedas de Juan Pablo y Braulio colapsó hace unas semanas, por lo que ahora hacen intercambios directos entre sus colecciones. Al final de una exitosa sesión de intercambio, Juan Pablo ha intercambiado tres diferentes tarjetas de Pokémon por 5 diferentes tazos de Totoro. ¿De cuántas maneras pudieron suceder esos intercambios si se sabe que ninguno entregó algún objeto sin recibir al menos otro a cambio?
11. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres números diferentes del Conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ de manera que la suma de esos tres números sea múltiplo de 3.
12. Encuentra el máximo común divisor de todos los números pares de seis dígitos que se forman usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 una vez.

Parte B

13. En una fiesta de la familia de Itzel, todos saludan a todos con las siguientes reglas.
- Si dos hombres se encuentran, se saludan con un abrazo.
 - Si una mujer y un hombre o dos mujeres se encuentran, se saludan con un beso.

Se sabe que, en total, se han dado 66 abrazos y 165 besos. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay en la fiesta?

14. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en A . Sea D el pie de altura A hacia BC . Demuestra que

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2}.$$

15. Sea n un número entero positivo. Demuestra que $n^5 - n$ es múltiplo de 30.